olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ *noktası vardır.* $0 < \theta < 1$ *olacak şekilde bir* θ *sayısı için* $c = a + \theta(b-a)$ *olacağından bu bağıntı*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}, 0 < \theta < 1 \tag{4.38}$$

şeklinde yazılabilir.

4.4.1 Çözümlü Problemler

(1) f, fonksiyonu

(a) f, $[x_0, x_n]$ üzerinde $n-1$ mertebeden sürekli türevlenebilirdir,

(b) f, (x_0, x_n) üzerinde n. mertebeden türevlenebilirdir,

(c) $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ olmak üzere $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ koşulları sağlanıyorsa ,$f^{(n)}(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (x_0, x_n)$ noktası vardır. Gösteriniz.

Çözüm: Her $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonu için Rolle teoreminin koşulları sağlandığından, $f'(c_i) = 0$ olacak şekilde bir $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ noktaları vardır. Her $[c_j, c_{j+1}]$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ aralığında f' fonksiyonu için Rolle teoreminin koşulları sağlandığından, $(f')'(d_j) = f''(d_j) = 0$ olacak şekilde bir $d_j \in (c_j, c_{j+1})$ noktaları vardır. Benzer şekilde, devam ederek $f^{(n-1)}(\xi_k) = 0$ olacak şekilde $n-(n-2) = 2$ tane $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_n)(\xi_1 < \xi_2)$ noktalarının varlığını elde ederiz.$f^{(n-1)}(x)$ fonksiyonu için $[\xi_1, \xi_2]$ aralığında Rolle teoreminin koşulları sağlandığından $(f^{(n-1)})'(c) = f^{(n)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (\xi_1, \xi_2)$ noktasının var olduğu anlaşılır. $\diamond$

(2) Eğer, reel katsayılı

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0$$

polinomunun kökleri reel ise, bu polinomun ${P_n}'(x), {P_n}''(x), \ldots, {P_n}^{(n-1)}(x)$ türevlerinin de kökleri reeldir. Gösteriniz.

Çözüm: $P_n(x)$ polinomunun kökleri $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $x_i \neq x_j\, i,j = 0,1,2,\ldots,n-1$ ise, Problem (1) den dolayı ${P_n}'(x) = 0$ denkleminin $n-1$ tane reel, ${P_n}''(x) = 0$ denkleminin $n-2$ tane reel ,v.s. ${P_n}^{(n-2)}(x) = 0$ denkleminin bir tane reel kökü vardır. $P_n(x) = 0$ denkleminin p katlı her reel kökü ${P_n}'(x) = 0$ denkleminin $p-1$ katlı bir kökü olduğundan reeldir. ⋄

(3) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$ Legendre polinomunun köklerinin reel ve $(-1,1)$ aralığı içinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $2n$. dereceden $U_n(x) = (x^2-1)^n$ polinomunun $2n$ tane $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$ ve $x_{n+1} = \cdots = x_{2n} = 1$ kökleri vardır. Problem 2 den dolayı n. dereceden $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}U(x)$ polinomunun, Rolle teoremi gereğince $(-1,1)$ içinde olacak n tane kökü vardır. ⋄

(4) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m \leq b$, $\omega_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$ olmak üzere $(m-1)$. dereceden

$$L_{m-1}(x) = L_{m-1}(f;x) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\frac{\omega_m(x)}{{\omega_m}'(x_k)(x-x_k)}$$

polinomuna Lagrange interpolasyon polinomu denir. $L_{m-1}(f;x_k) = f(x_k)$, $k = 1,2,\ldots,m$ olduğu açıktır. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde m. mertebeden sürekli türevlenebilir, yani $f^{(m)} \in C[a,b]$ ise,

$$f(x) - L_{m-1}(f;x) = \frac{f^{(m)}(c(x))}{m!}\omega_m(x), x \in [a,b]$$

olacak şekilde bir $c(x) \in (a,b)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $A \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için

$$\varphi(x) = f(x) - L_{m-1}(f;x) - A.\omega_m(x)$$

fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde m. mertebeden sürekli türevlenebilirdir ve $\varphi(x_k) = 0$ $k = 1,2,\ldots,m$ olur. A sabit sayısını $\bar{x} \in [a,b] \diagdown \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

olmak üzere $\varphi(\bar{x}) = 0$ koşulundan seçelim. Buna göre, $\bar{x} \neq x_k$, $k = 1, 2, \cdots, m$,dolayısıyla $\omega_m(\bar{x}) \neq 0$ olduğuna göre, $A = \frac{f(\bar{x}) - L_{m-1}(f, \bar{x})}{\omega_m(\bar{x})}$ bulunur. Bitim noktaları $\varphi(x)$ fonksiyonunun $m{+}1$ tane $\bar{x}, x_1, x_2, \cdots, x_m$ köklerinde olan m tane açık aralık içinde (Rolle teoremi gereğince) $\varphi'(x)$ fonksiyonunun m tane kökü vardır. Rolle teoremini $\varphi'(x)$ fonksiyonuna uygulayarak onun m tane kökleri arasında $\varphi''(x)$ fonksiyonunun $m-1$ tane kökünün varlığını elde ederiz. Benzer şekilde, devam ederek m. adımda $\varphi^{(m)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c = c(x) \in (a, b)$ noktasının mevcut olduğunu görmüş oluruz. $L_{m-1}(f; x)$,$m-1$. dereceden bir polinom olduğuna göre, $L_{m-1}^{(m)}(f; x) \equiv 0$ ve $\omega_m^{(m)}(x) \equiv m!$ olduğuna göre,
$\varphi^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - A.m!$ ve buradan da ($\varphi^{(m)}(c) = 0$ olduğuna göre) $A = \frac{f^m(c)}{m!}$ bulunur. Bu ise, istenen eşitliğin doğru olması demektir. $\diamond$

(5) Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonları için (4.37) formülünü gerçekleyecek şekilde $\theta = \theta(x_0; \Delta x)$ fonksiyonlarını bulunuz.
(a) $f(x) = ax^2 + bx + c$; (b) $f(x) = e^x$.

Çözüm: (a) $f'(x) = 2ax + b$ olduğuna göre, (4.36) dan dolayı
$a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - ax_0^2 - bx_0 - c = (2a(x_0 + \theta\Delta x) + b)\Delta x$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x \\ &=\ 2ax_0\Delta x + 2a\theta(\Delta x)^2 + b\Delta x \\ &\Rightarrow\ a(\Delta x)^2 = 2a\theta(\Delta x)^2 \\ &\Rightarrow\ \theta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.
(b) $f'(x) = e^x$ olduğuna göre, (4.36) dan dolayı

$$\begin{aligned} e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} &= e^{x_0+\theta\Delta x}\Delta x \\ &\Rightarrow\ e^{\Delta x} - 1 = e^{\theta\Delta x}\Delta x \\ &\Rightarrow\ e^{\theta\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &\Rightarrow\ \theta = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(6) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \text{ ise}, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < +\infty \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ olacak şekilde $c \in (0, 2)$ noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{3-(1+h)^2}{2} - 1}{h} = -1, \\ f'(1^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = 1 \end{aligned}$$

olduğuna göre, f fonksiyonu $x = 1$ noktasında türevlenebilirdir. $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$ ve

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \le 1 \text{ ise}, \\ -\frac{1}{x^2}, & 1 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre,

$f(2) - f(0) = 2f'(c), 0 < c < 2 \Rightarrow -1 = \begin{cases} -2c, & 0 < c \le 1 \text{ ise}, \\ -\frac{2}{c^2}, & 1 < c < 2 \text{ ise} \end{cases}$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$ ve $c_2 = \sqrt{2}$ bulunur. $\diamond$

(7) $f : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(x_0, +\infty)$ üzerinde türevlenebilir ve $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ ise,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_n \in (0, +\infty)$, $n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ koşullarını sağlayan herhangi artan bir (x_n) dizisi verilsin. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n > n_\varepsilon$ için

$$|\ f'(x_n)\ | \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.39}$$

olur. Sabit $n_0 > n_\varepsilon$ ve $\forall n > n_0$ için Lagrange teoremi gereğince

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_0} \right| = | f'(c) | \tag{4.40}$$

olacak şekilde bir $c = c(n_0, n) \in (x_{n_0}, x_n)$ noktası vardır. (4.39) ve (4.40) tan

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.41}$$

elde ederiz.

$$\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_0}\left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) + \frac{f(x_{n_0})}{x_n}$$

olduğuna göre, (4.41) den

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{n_0})}{x_n} - (1 - \frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} &< \frac{f(x_n)}{x_n} \\ &< \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + (1 - \frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{4.42}$$

olduğu elde edilir. $(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x_{n_0})}{x_n} = f(x_{n_0}) \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ olduğuna göre, (4.42) den dolayı $n_0 > n_\varepsilon$ ve yeteri kadar büyük $n > n_0$ için

$$-\varepsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \varepsilon$$

olur. Bu ise, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$ dolayısıyla $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ olması demektir. $\diamond$

(8) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f \in C[a, b]$,

(b) $f, (a, b)$ üzerinde türevlenebilirdir,

(c) $f, [a, b]$ üzerinde lineer bir fonksiyon değildir koşulları sağlanıyor ise,

$$| f'(c) | = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \tag{4.43}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ noktası vardır. Gösteriniz.

Çözüm: $[a,b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması verilsin. O halde,

$$\begin{aligned} \mid f(b) - f(a) \mid &= \mid \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \mid \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mid [f(x_i) - f(x_{i-1})] \mid \end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. Lagrange teoremi gereğince $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\, i = 1, 2, \cdots, k$ olmak üzere

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$$

olacak şekilde bir $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ nokatsı vardır. Buna göre (4.44) ten

$$\mid f(b) - f(a) \mid \leq \sum_{i=1}^{n} \mid f'(c_i) \mid \Delta x_i \tag{4.45}$$

olur. $f, [a,b]$ üzerinde lineer bir fonksiyon olmadığından dolayı $[a,b]$ nin öyle bir $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması vardır ki ,

$$\mid f'(c_{n_0}) \mid = \max\{\mid f'(c_1) \mid, \cdots, \mid f'(c_n) \mid\} > 0, 1 \leq n_0 \leq n$$

olur. O halde, (4.45) ten

$$\mid f(b) - f(a) \mid < \mid f'(c_{n_0}) \mid \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \mid f'(c_{n_0}) \mid (b-a),$$

dolayısıyla (4.43) eşitsizliğinin $c = c_{n_0}$ için doğru olduğu anlaşılır. $\diamond$

(9) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f, [a,b]$, üzerinde 2. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $f'(a) = f'(b) = 0$ koşulları sağlanıyor ise,

$$\mid f''(c) \mid \geq \frac{4}{(b-a)^2} \mid f(b) - f(a) \mid \tag{4.46}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = A$ (A *sabit*) fonksiyonu için (4.46) nın her $c \in (a,b)$ için sağlandığı açıktır.Şimdi $f, [a,b]$ üzerinde sabit bir fonksiyon olmasın. Bu durumda (b) den f nin lineer fonksiyon olmadığı anlaşılır. f ve $\varphi : [a, \frac{a+b}{2}] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{(x-a)^2}{2}$ fonksiyonlarına $[a, \frac{a+b}{2}]$ve f veψ : $[\frac{a+b}{2}, b], \psi(x) = \frac{(b-x)^2}{2}$ fonksiyonlarına $[\frac{a+b}{2}, b]$ üzerinde Cauchy teoremini uygularsak,

$$\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{(b-a)^2}{8}} = \frac{f'(c_1)}{c_1 - a}, \quad a < c_1 < \frac{a+b}{2}$$

ve

$$\frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{\frac{(b-a)^2}{8}} = \frac{f'(c_2)}{b - c_2}, \quad \frac{a+b}{2} < c_2 < b$$

olduğu elde edilir.Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{8(f(b) - f(a))}{(b-a)^2} = \frac{f'(c_1)}{c_1 - a} + \frac{f'(c_2)}{b - c_2} \tag{4.47}$$

bulunur. $f'(a) = f'(b) = 0$ olduğuna göre, (4.47) nin sağ tarafı Lagrange teoremi gereğince $a < d_1 < c_1$ ve $c_2 < d_2 < b$ olmak üzere ,

$$\frac{f'(c_1)}{c_1 - a} + \frac{f'(c_2)}{b - c_2} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{c_1 - a} - \frac{f'(b) - f'(c_2)}{b - c_2} = f''(d_1) - f''(d_2)$$

biçiminde yazılabilir.O halde, (4.47) den

$$\frac{8 \mid f(b) - f(a) \mid}{(b-a)^2} \leq \mid f''(d_1) \mid + \mid f''(d_2) \mid$$

olduğu elde edilir. $f(a) \neq f(b)$ olsun. ($f(a) = f(b)$ durumunda (4.46) nın $\forall c \in (a,b)$ için doğru olduğu açıktır).Bu durumda, $\mid f''(d_1) \mid$ ve $\mid f''(d_2) \mid$ sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

$$\max \{\mid f''(d_1) \mid, \mid f''(d_2) \mid\} = \mid f''(c) \mid, (c = d_1 \text{ yada } \mathrm{c} = \mathrm{d}_2)$$

dersek, $c \in (a,b)$ olmak üzere

$$\frac{8 \mid f(b) - f(a) \mid}{(b-a)^2} \leq 2 \mid f''(c) \mid \Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2} \mid f(b) - f(a) \mid \leq \mid f''(c) \mid$$

olur. $\diamond$

(10) $0 < x_1 < x_2$ve$f : [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevlenebilir ise,

$$\frac{1}{x_2 - x_1}(x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)) = f(c) - cf'(c)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ve $\mathrm{G(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ fonksiyonları için $[x_1, x_2]$ aralığında Cauchy teoreminin koşulları sağlandığından

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \tag{4.48}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 x_2},$$

$$G(x_2) - G(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2},$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2},\ G'(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \in (x_1, x_2)$$

olduğuna göre,

$$(4.49) \Leftrightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{cf'(c) - f(c)}{-1}$$

olur.Bu ise, istenen sonucun doğru olması demektir. $\diamond$

(11) Eğer, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde türevlenebilirse ve $f'(x)$ fonksiyonu (a, b) üzerinde sınırlı ise, , f fonksiyonu (a, b) üzerinde düzgün süreklidir.Gösteriniz.

Çözüm: f' fonksiyonu (a, b) üzerinde sınırlı olduğuna göre, $\forall x \in (a, b)$ için $\mid f'(x) \mid \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabit sayısı vardır.O halde, herhanbi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ şeklinde seçildiğinde $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ için
$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid [Lagrange\ teoreminden]$
$= \mid f'(c) \mid \mid x_1 - x_2 \mid \leq M \mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon$ olduğu elde edilir. Bu ise, f nin (a, b) üzerinde düzgün sürekli olması demektir. $\diamond$

(12) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda, $\forall c \in (a,b)$ için,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad x_1 < c < x_2$$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in (a,b)$ noktaları var mıdır?

Çözüm: $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) \geq 0$ ve f, $\forall[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ aralığında lineer olmayan bir fonksiyon olduğu durumda $f, (a,b)$ üzerinde artandır. O halde, $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ için

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

olduğuna göre, (a,b) aralığının $f'(x) = 0$ olacak şekildeki noktaları için

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

eşitliği sağlanamaz.Örneğin,$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ fonksiyonu ve $\forall x_1, x_2 \in [-1,1]$ noktaları için

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$$

olduğuna göre, $c = 0$ noktası için söz konusu x_1 ve x_2 noktaları mevcut değildir. $\diamond$

(13) $f, g : [x_0, +\infty)$ fonksiyonları için

(a) f ve g, $[\mathrm{x}_0, +\infty)$ üzeride n. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$,

(c) $\forall x \in (x_0, +\infty)$ için $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ dir
koşulları sağlanıyorsa, $\forall x \in (x_0, +\infty)$ için $f(x) > g(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}\,, F(t) = f^{(n-1)}(t) - g^{(n-1)}(t)\ (x_0 < x)$ fonksiyonu için $[x_0, x]$ aralığında Lagrange teoreminin koşulları sağlandığından

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_0, x)$ noktası vardır.
$F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0\,, F'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$ ve $x - x_0 > 0$ olduğuna göre, son eşitlikten $\forall x > x_0$ için $F(x) > 0$, yani $\forall x > x_0$ için $f^{(n-1)}(x) > g^{(n-1)}(x)$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $\forall x > x_0$ için $f^{(n-2)}(x) > g^{(n-2)}(x), \cdots, f(x) > g(x)$ olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(14) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$ için $e^x > 1 + x$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;

(d) $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$;

(e) $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $0 < \alpha < \beta$ için $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

Çözüm: (a) $f(x) = e^x, g(x) = 1 + x$ dersek $f(0) = g(0)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f'(x) = e^x > 1 = g'(x)$ olduğuna göre, Problem (13) e göre $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f(x) > g(x)$, yani $e^x > 1 + x$ olduğu elde edilir.
$x < 0$ iken $x = -t$ dersek $f(t) = e^{-t}, g(t) = 1 - t, t \geq 0$ olduğu açıktır. $f(0) = g(0)$ ve $\forall t > 0$ için $f'(t) = -e^{-t} > -1 = g'(t)$ olduğuna göre, $\forall t > 0$ için $f(t) > g(t)$, yani $\forall x \in (-\infty, 0)$ için $\mathrm{e^x > 1 + x}$ olduğu anlaşılır.
(b) $f(x) = x - \frac{x^2}{2},\ g(x) = \ln(1 + x), h(x) = x,\ x > 0$ olsun. $f(0) = g(0) = h(0)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f'(x) < g'(x) < h'(x)$ olduğuna göre, Problem (13) ten $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f(x) < g(x) < h(x)$,yani $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ olduğu elde edilir.
(c) $f(x) = x - \frac{x^3}{6}, g(x) = \sin x, h(x) = x$ dersek $f(0) = g(0) = h(0)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}_+\diagdown\{2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ için $f'(x) < g'(x) < h'(x)$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}_+\diagdown\{2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ için $f(x) < g(x) < h(x)$ olur.$x = 2k\pi, k \in \mathbb{N}$

için $2k\pi(1-\frac{4k^2\pi^2}{6})<0<2k\pi$, yani $f(2k\pi)<g(2k\pi)<h(2k\pi)$ olduğu açıktır.Böylece $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için f(x) < g(x) < h(x) dır.
(d) $f(x)=\tan x, g(x)=x+\frac{x^3}{3}, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ olsun. $f(0)=g(0)$ ve $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x, g'(x)=1+x^2, \tan^2 x>x^2$ olduğuna göre, $f'(x)>g'(x)$ olduğu açıktır. Problem 13 e göre $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için $f(x)>g(x)$ dir.
(e) Herhangi $x,y\in\mathbb{R}_+$ ler ve herhangi $0<\alpha<\beta$ için

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\iff((\frac{x}{y})^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}>((\frac{x}{y})^\beta+1)^{\frac{1}{\beta}}$$

olduğu açıktır. Son eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.$\frac{x}{y}=t$ diyerek, $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ \varphi(\tau)=(t^\tau+1)^{\frac{1}{\tau}}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\forall\tau\in\mathbb{R}_+$ için $\ln\varphi(\tau)=\frac{1}{\tau}\ln(t^\tau+1)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} &= \frac{t^\tau\ln t}{\tau(t^\tau+1)}-\frac{\ln(t^\tau+1)}{\tau^2}\\ &\Rightarrow\ \varphi'(\tau)=\varphi(\tau)(\frac{t^\tau\ln t}{\tau(t^\tau+1)}-\frac{\ln(t^\tau+1)}{\tau^2})\\ &= \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2(t^\tau+1)}\ln\frac{(t\tau)^{t^\tau}}{(t^\tau+1)^{t^\tau+1}}<0 \end{aligned}\qquad(4.49)$$

olur. Buna göre Sonuç 4.4.15 ten dolayı $\varphi(\tau)$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde azalandır. Demek ki,

$$0<\alpha<\beta<+\infty\Rightarrow\varphi(\alpha)>\varphi(\beta),$$

yani $x,y\in\mathbb{R}_+$ ve $0<\alpha<\beta$ için $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ eşitsizliği sağlanır. ◇

(15) Lagrange teoreminden faydalanarak aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1<x_2$ için $\arctan x_2-\arctan x_1\le x_2-x_1$;

(b) $x_1,x_2\in[a,+\infty), a\in\mathbb{R}_+$ için $|\ln x_2-\ln x_1|<\frac{|x_2-x_1|}{a}$;

(c) $x_1,x_2\in[1,e]$için $|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2|\le|\mathrm{x}_1^2\ln\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2^2\ln\mathrm{x}_2|\le 3\mathrm{e}\,|\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1|$;

(d) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $\mid \frac{\sin \mathrm{x}_1 - \sin \mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2} - \cos \mathrm{x}_2 \mid \leq \mid \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 \mid$.

Çözüm: (a) Lagrange teoremi gereğince

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = (\arctan x)'_{x=c}.(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.$\arctan x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$0 \leq (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

dir. Buna göre, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ için

$$0 < \arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1) \leq x_2 - x_1$$

olduğu anlaşılır.

(b) $x_1, x_2 \in [a, +\infty), a \in \mathbb{R}_+$ ve $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ olduğuna göre, Lagrange teoremi gereğince

$$\ln x_2 - \ln x_1 = (\ln x)'_{x=c}(x_2 - x_1) = \frac{1}{c}(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır. O halde,

$$a \leq x_1 < c < x_2 < +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{a} \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, +\infty),$$

$x_1 < x_2$ için ($\ln x$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde artan olduğuna göre,)

$$0 < \ln x_2 - \ln x_1 \leq \frac{(x_2 - x_1)}{a}$$

elde ederiz. Benzer şekilde, $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty), x_2 < x_1$ için $0 < \ln x_1 - \ln x_2 \leq \frac{(x_1 - x_2)}{a}$,yani $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ için $\mid lnx_2 - lnx_1 \mid \leq \frac{|x_2 - x_1|}{a}$ eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $(x^2 \ln x)' = x(1 + 2\ln x)$ olduğuna göre, Lagrange teoremi gereğince $\forall x_1, x_2 \in [1, e]$ için

$$x_2{}^2 \ln x_2 - x_1{}^2 \ln x_1 = (x^2 \ln x)'_{x=c}(x_2 - x_1) = c(1 + 2\ln c)(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde x_1 ile x_2 arasında bir c noktası vardır. $\forall x \in [1, e]$ için $1 \leq x(1 + 2\ln x) \leq 3e$ olduğuna göre, $\forall x_1, x_2 \in [1, e]$ için son eşitlikten

$$| x_2 - x_1 | \leq | {x_2}^2 \ln x_2 - {x_1}^2 \ln x_1 | = c(1+2\ln c) \mid x_2 - x_1 | \leq 3e \mid x_2 - x_1 |$$

olduğu,dolayısıyla,istenen eşitsizliğin doğru olduğu anlaşılır.

(d) Lagrange teoremi gereğince $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \neq x_2)$ için

$$\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = (\sin x)'_{x=c} = cosc$$

olacak şekilde x_1 ile x_2 arasında bir c noktası vardır. O halde, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \neq x_2)$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} - \cos x_2 \right| &= | \cos c - \cos x_2 | \\ &= \left| -2\sin\frac{c - x_2}{2} \sin\frac{c + x_2}{2} \right| \end{aligned}$$

[$\forall x \in \mathbb{R}$ için $| \sin x | \leq 1$ ve $| \sin x | \leq | x |$ olduğundan]

$$\leq 2\frac{| c - x_2 |}{2} \leq | x_1 - x_2 |,$$

dolayısıyla, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için istenen eşitsizliğin sağlandığı anlaşılır. $\diamond$

(16) **Darboux Teoremi:** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, $f'(x)$ fonksiyonu $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.Gösteriniz.

Çözüm: (a) $f'(a)f'(b) < 0$, örneğin, $f'(a) > 0$ ve $f'(b) < 0$ olsun. $f, [a, b]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, bu fonksiyon $[a, b]$ üzerinde süreklidir (Bkz. Önerme 4.1.3). O halde, Weierstrass teoremi gereğince (Bkz.Teorem 3.2.7)

$$f(c) = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ noktası vardır.$c \in (a, b)$ olduğunu görelim.

$$0 < f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \Rightarrow \exists \delta > 0 \ (0 < \delta < b - a) \ \forall h \in (0, \delta)$$

için

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0 \Rightarrow \forall h \in (0,\delta)$$

için $f(a+h)>f(a)$ olduğu açıktır.Buna göre, $f\,[a,a+\delta]$ aralığında artandır, yani $c\neq a$ dır.Benzer şekilde, $c\neq b$ olduğu gösterilir. Demek ki, $c\in(a,b)$. O zaman, Fermat teoremine göre $f'(c)=0$ dır.
(b) Şimdi teoremi genel durumda, yani herhangi $f'(a)$ ve $f'(b)$ değerleri için ispatlayalım.$f'(a)>f'(b)$ olsun ($f'(a)<f'(b)$ olduğunda ispat benzer şekilde yapılır). $A\in(f'(a),f'(b))$ olmak üzere $F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(x)=f(x)-Ax$ fonksiyonunu gözönüne alalım. F nin $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir ($\forall x\in[a,b]$) için $F'(x)=f'(x)-A$ dır.) ve $F'(a)=f'(a)-A<0, F'(b)=f'(b)-A>0$ olduğu açıktır.O halde, (a) ya göre $F'(c)=0$, yani $f'(c)=A$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktasının mevcut olduğu anlaşılır. $\diamond$

4.4.2 Ek Problemler

(17) $L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ Chebyshev-Laguerre polinomunun köklerinin pozitif olduğunu gösteriniz.

(18) $H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ Chebyshev-Hermite polinomunun köklerinin reel olduğunu gösteriniz.

(19) Aşağıda verilen $y=f(x)$ fonksiyonları için $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ Lagrange formülünü gerçekleyen $c\in(a,b)$ noktasını bulunuz.

(a) $f(x)=x^2$; (b) $f(x)=5x^3+2x$;
(c) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; (d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

(20) Aşağıda verilen $y=f(x)$ fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında Rolle teoreminin koşullarını sağlar mı?

(a) $f(x)=\frac{2-x^2}{x^4}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \text{ ise}, \\ e^x, & x > 0 \text{ ise}; \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \le 0 \text{ ise}, \\ 1-x^3, & x > 0 \text{ ise}. \end{cases}$

(21) Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonları karşılarında yazılı I aralığında Lagrange teoreminin koşullarını sağlar mı?

(a) $f(x) = \mid x \mid$, $I = [-1, 1]$;

(b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $I = [-1, 1]$;

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = [-1, 2]$;

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = [a, b], ab < 0$;

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ ise}, \\ \frac{1}{x}, & x \ge 1 \text{ ise}, \text{I} = [0,4]; \end{cases}$

(f) $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$, $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(22) Aşağıda verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları karşılarında yazılı I aralığı üzerinde Cauchy teoreminin koşullarını sağlar mı?

(a) $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $I = [-2, 2]$;

(b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $I = [-8, 8]$.

(23) Eğer, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sonlu (a, b) aralığında türevlenebilir, fakat sınırsız ise, $f'(x)$ fonksiyonunda (a, b) aralığında sınırsız olacağını gösteriniz.Bu sonucun tersinin doğru olmayacağını gösteren bir örnek veriniz.

Cevap: $f : (0, 1) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(24) $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

(a) $f, g \in C^n[a, b]$,

(b) f ve g , (a, b) aralığında $(n+1)$. mertebeden türevlenebilirdir koşulları sağlanıyorsa ,

$$\Big(g(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big) f^{(n+1)}(c) = \Big(f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big) g^{(n+1)}(c)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktasının varolacağını gösteriniz.

(25) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq e.x$;

(b) $x \in (-1, +\infty)$ için $e^x > 1 + \ln(1 + x)$;

(c) $x \in \mathbb{R}$ için $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$;

(d) $x \in \mathbb{R}$ için $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$;

(e) $x \in [0, \infty)$ için $\arctan x \leq x$;

(f) $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için $\sin x + \tan x > 2x$;

(g) $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ için $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x - \frac{x^3}{6}$;

(h) $x \in (1, +\infty)$ için $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

(26) Lagrange teoreminden faydalanarak aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\mid \cos x - \cos y \mid \leq \mid x - y \mid$;

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\mid \sin x - \sin y \mid \leq \mid x - y \mid$;

(c) $0 < x < y, n \in \mathbb{N}$ için

$$n(y - x)x^{n-1} < y^n - x^n < n(y - x)y^{n-1};$$

(d) $0 < x < y$ için $\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$;

(e) $\forall x, y \in [0, 1]$ için

$$\mid x^2 \arctan x - y^2 \arctan y \mid \leq \frac{1 + \pi}{2} \mid x - y \mid .$$

4.5 Taylor Formülü

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde $(n+1)$. mertebeden türevlenebilen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in (a, b)$ noktası verilmiş olsun.Taylor formülü yardımıyla,

$$f(x_0), f'(x_0), \cdots , f^{(n)}(x_0)$$